СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Уважаемые читатели!

Предлагаемая вашему вниманию книжка представляет интерес, прежде всего, как значительная попытка серьезных профессиональных математиков разобраться в математике школьной (в том числе — ЕГЭшной).

Представлено два результата такой попытки.

Один, изложенный во второй части работы — это демонстрация красивого метода решения некоторого класса задач с параметром, включающих функцию модуль, основанного на «соображениях непрерывности». Основное используемое соображение состоит в том, что все точки экстремума для функции от одной переменной, являющейся суперпозицией полиномов и модулей, содержатся среди точек экстремума всех функций, получающихся произвольными «раскрытиями» всех модулей и точками, в которых какой-либо из модулей обращается в ноль. Это соображение может получать различные конкретные уточнения в конкретных ситуациях.

Второй результат — куда более масштабен. Его изложение занимает первую часть книжки и заслуживает очень пристального внимания. Речь идет о применении современных информационных технологий (компьютера или каких-либо других устройств) в математике и изучении математики. Начнем обсуждение немного издалека. Очевидно, что взрослые люди, которым надо что-то посчитать, не прибегают к вычислениям столбиком, они берут в руки калькулятор. Почему же мы не даем калькулятор детям? Ответ хорошо известен: если школьники без ограничений будут использовать калькулятор, то они не научатся ни устному счету, ни вычислениям в столбик, а мы этого не хотим. Вопрос о том, чем же плохо то, что дети этому не научатся, уже более сложен. Так или иначе мы ощущаем, что бесконтрольное использование калькулятора подрывает какие-то устои школьного курса математики (а, может быть — и мироздания). С контролируемым использованием дело сложнее. Почему бы собственно, как это происходит во многих странах мира (или в России — в курсе физики), не разрешить использование калькулятора в одни моменты образовательного процесса при решении математических задач и запретить в другие моменты? Или, иной подход: почему бы не договориться, что если выпускник использует калькулятор на экзамене, то максимальная его оценка (в условных единицах) — это четыре балла из пяти?

Теперь более непосредственно — о результатах проекта, реализованного группой математиков компании «Северный очаг» и представленного в настоящей книге. Помимо численных расчетов профессионалам бывают нужны и формульные вычисления. В течение многих десятилетий математики и программисты строили алгоритмы автоматизации таких вычислений. На уровне вузовских задач и некоторых профессиональных областей самой знаменитой удачной попыткой построения системы формульных вычислений является Mathematica Стивена Вольфрама (http://www.wolfram.com/). Параллельно с совершенствованием алгоритмов шел рост мощности компьютеров и сегодня Mathematica «идет» на обычной персоналке. (Другим примером, популярным в России, является Maple, есть и другие.)

Авторы поставили перед своим коллективом иную задачу: создать систему формульных вычислений, ориентированную непосредственно на (прежде всего — российскую) среднюю школу. Такая ориентация означает, что преобразования, автоматически генерируемые системой, будут представлены пользователю так, как этого ожидает от школьника учитель, в частности, сопровождаться требуемыми обычно пояснениями. Данную задачу коллектив решил. Решение не только впечатляет, но и ставит перед нашей системой образования, как говорили в предыдущих поколениях, «вопрос ребром»: что с этим делать? Действительно, с одной стороны, зачем мы учим детей делать то, что уже полностью автоматизировано (как в случае с калькулятором)? С другой стороны: как можно «в мирных целях» использовать полученный результат? Некоторые ответы на эти вопросы приводятся в книжке. Независимо от предлагаемых ответов, я считаю, что каждый уважающий себя учитель математики должен попытаться ответить на эти вопросы сам и при этом посмотреть на работу системы, названной авторами UMS, «живьем» — в Интернете.

Мне кажется, что сказанного уже достаточно, чтобы рекомендовать настоящую книгу для чтения. Добавлю, однако, еще несколько слов. В публикации, как это принято сейчас говорить, «сохранена орфография и стилистика авторов». Не ищите в ней отполированных до блеска, безупречных рассуждений, ни принадлежащих компьютеру, ни авторам. Книга ценна не методикой, а своим подходом. Надеюсь, что читатель этот подход оценит.

Уверен при этом, что у читателя появится много мыслей на тему о том, как что-то можно (а часто и нужно) улучшить. Мы просим все возникшие при этом идеи направить авторам (по адресу ums@umsolver.com), они будут с благодарностью учтены в дальнейшей работе.

Ректор Московского института
открытого образования,
академик А.Л. Семенов

Введение

Среди заданий ЕГЭ, оцениваемых максимальным числом баллов, постоянно присутствуют задания с параметрами и модулями. Эти задания практически не отражены в школьном курсе и всегда вызывают значительные затруднения у очень многих выпускников и даже у учителей. Одной из причин этого является отсутствие общих приемов и методов для решения подобных заданий и необходимость строить и анализировать графики, зависящие от параметра.

В настоящем пособии изложен простой прием, позволяющий решить многие подобные задачи алгебраически, без построения графиков. Таким образом, сложная нестандартная задача сводится к стандартной системе или совокупности неравенств, которые достаточно хорошо разобраны в школьном курсе.

Если у вас есть компьютер, то вы сможете решить эти задания, воспользовавшись новой версией 10.0 российской компьютерной программы UMS —«Универсальный математический решатель» (www.umsolver.com).

Представленная здесь версия UMS позволяет решить через Интернет (со звуковым сопровождением и текстовыми комментариями) практически любые школьные задания по алгебре, тригонометрии и математическому анализу, включая многие задания ЕГЭ.

В программе UMS предусмотрена возможность автоматического составления задания, аналогичного последнему решенному, и решения его по шагам. Это дает возможность использования программы в качестве самоучителя при подготовке к экзамену. Учителя могут использовать UMS для автоматической генерации контрольных и самостоятельных работ с любым числом вариантов по составленному ими образцу. У учителей появляется возможность проверить не только ответ, но и весь ход решения.

Программа UMS будет интересна и родителям, которые легко смогут проконтролировать, правильно ли ребенок решает то или иное задание, и дать ему необходимые объяснения.

Описание возможностей программы UMS читатель найдет в первом параграфе. Там показано, как программа UMS поможет справиться с некоторыми примерами частей В и С из ЕГЭ последних лет. Во втором параграфе дано описание единого метода для решения ряда заданий ЕГЭ с параметрами и модулями. Приведены примеры с ответами и указаниями. В конце приведены варианты заданий для самостоятельного решения и ответы к ним. Параграфы независимы, и их можно читать в любом порядке.

Авторы

1. Универсальный математический решатель — помощник в решении учебных заданий любой сложности

Universal Math Solver — UMS.

Программа, название которой вынесено в заголовок, по сути своей уникальна. Уникальность программы в том, что UMS решает любой пример, взятый из учебника, задачника или просто придуманный, и объясняет каждый шаг этого решения! UMS умеет говорить и молчать (по вашему желанию).

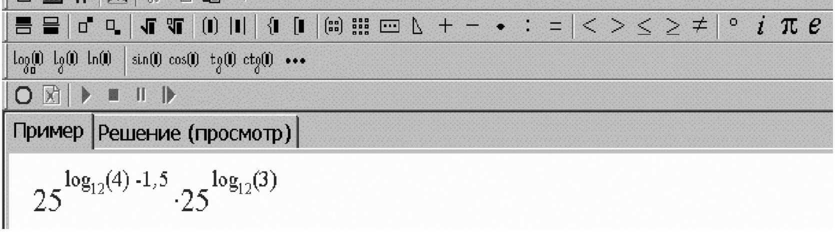
Универсальному Решателю под силу задания любой степени сложности (от простейших до олимпиадных).

На сегодняшний день это единственная программа, которая справляется (дает не только ответ, но и подробные объяснения) с заданиями ЕГЭ, включая некоторые задания части С.

Ниже мы приводим примеры решений некоторых заданий ЕГЭ с помощью программы UMS.

B7. Найти значение выражения:

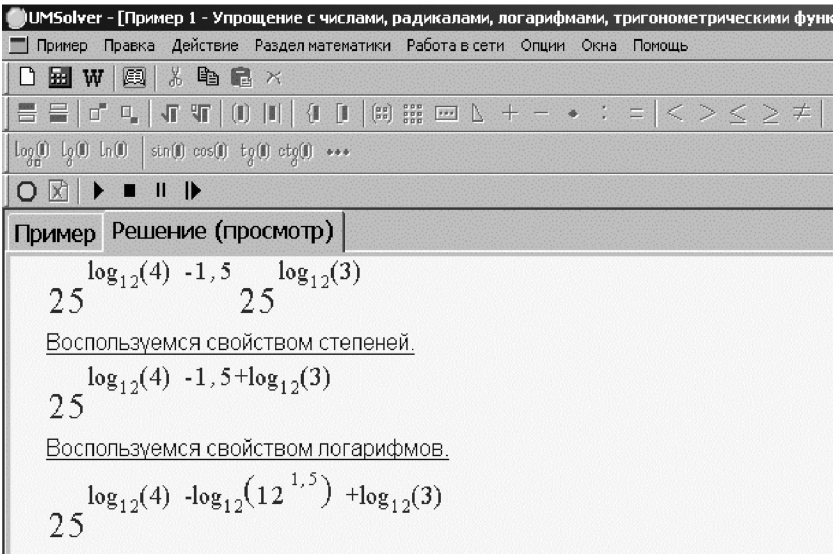
$$25^{\log_{12}(4)-1,5}\cdot 25^{\log_{12}(3)}.$$



Вы вводите требуемое задание в окно ввода нового примера программы UMS так, как оно записано в тетради. При наборе математического задания допускается использование как обычной клавиатуры, так и экранной (она представлена в виде линейки функциональных клавиш под основным меню). При работе с обычной клавиатурой необходимо помнить, что для возведения числа в степень используется символ «^» (комбинация клавиш «Shift+6»), черте дроби соответствует символ «/», операции умножения — символ «*» (Shift+8), а знаку абсолютной величины — символ «|» («Shift+\»).

Когда пример введен полностью, вы нажимаете мышкой зеленую кнопочку. Через секунду на экране начинается вывод подробного решения примера со звуковыми и текстовыми комментариями.

При желании вы можете распечатать полученное решение или сохранить его как файл формата Word (пункт меню «Пример» -> «Печать» или «Послать в MS Word»).



Логарифм произведения равен сумме логарифмов.

$$25^{\log_{12}\left(4:12^{1,5}\,3\right)}$$

Преобразуем деление в дробь.

$$25^{\log_{12}\left(\frac{4\cdot 3}{12^{1,5}}\right)}$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$25^{\log_{3\cdot 4}\left((3\cdot 4)^{-0,5}\right)}$$

Воспользуемся свойством логарифмов.

$$25^{-0,5}$$

Воспользуемся свойством степеней.

$$\left(5^{2}\right)^{-0,5}$$

$$5^{-1}$$

$$\frac{1}{5}$$

С1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3y - 8x + 16y = 0 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Откройте новое окно для ввода примера, выбрав пункт «Пример» ->«Новый» в основном меню. Для ввода знака системы используйте соответствующую кнопку экранной клавиатуры. Для перехода в системе на другую строку нажмите клавишу «Ввод (Enter)» .

Посмотрите, как эту систему уравнений решает программа UMS.

Пример | Решение (просмотр)

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 y - 8x + 16y = 0 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$\left(-2x^3 + 16\right)y + \left(x^4 - 8x\right) = 0$$

Выносим общий множитель.

$$\left(x^3 - 8\right)(-2)y + \left(x^3 - 8\right)x = 0$$

Выносим общий множитель.

$$\left(x^3 - 8\right)((-2)y + x) = 0$$

Выносим знак минус из произведения.

$$\left(x^3 - 8\right)(-2y + x) = 0$$

Изменяем порядок действий.

$$\left(x^3 - 8\right)(x - 2y) = 0$$

$$\begin{cases} \left(x^3 - 8\right)(x - 2y) = 0 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^3 - 8 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right. \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.

$$\begin{cases} x^3 - 8 = 0 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$x^3 - 8 = 0$

Перенесем известные величины в правую часть уравнения.

$x^3 = 8$

Ответ вспомогательного уравнения: $x = 2$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Подставим вместо переменной x найденное выражение.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 + 4y = 18 \end{cases}$$

Выносим общий множитель.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 1 + 2y = 9 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$1 + 2y = 9$

Перенесем известные величины в правую часть уравнения.

$2y = 9 - 1$

$2y = 8$

Разделим левую и правую часть уравнения на коэффициент при неизвестном.

$y = 4$

Из уравнения 2 выразим переменную y.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Итак,ответ этого случая:

x	y
2	4

Случай 2.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Из уравнения 1 выразим переменную x.

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 4y = 18 \end{cases}$$

Подставим вместо переменной x найденное выражение.

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2y + 4y = 18 \end{cases}$$

Приводим подобные члены.

$$\begin{cases} x = 2y \\ 6y = 18 \end{cases}$$

Выносим общий множитель.

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = 3 \end{cases}$$

Подставим вместо переменной y найденное выражение.

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

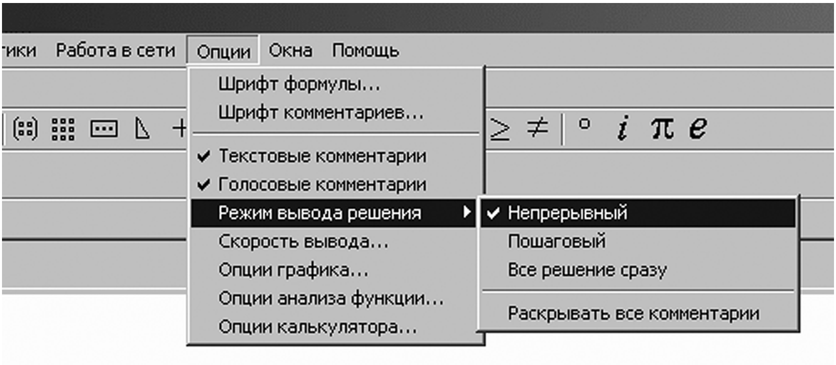
Итак,ответ этого случая:

x	y
6	3

Окончательный ответ:

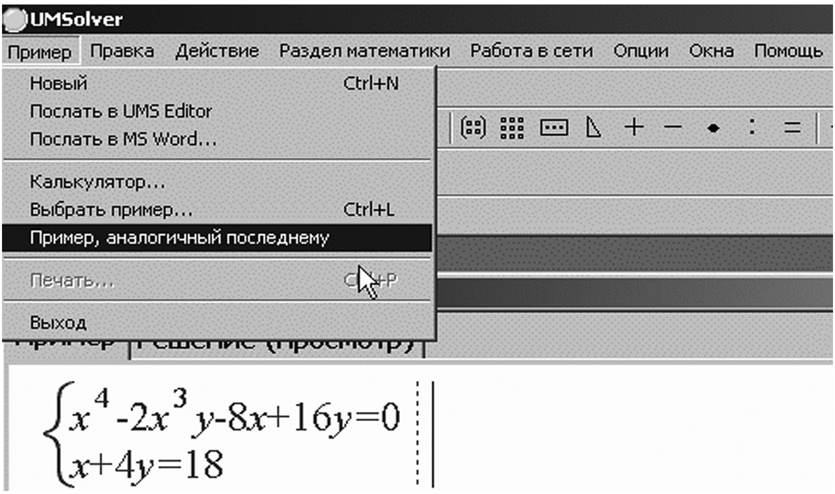
x	y
2	4
6	3

Демонстрацией математических выкладок можно управлять.

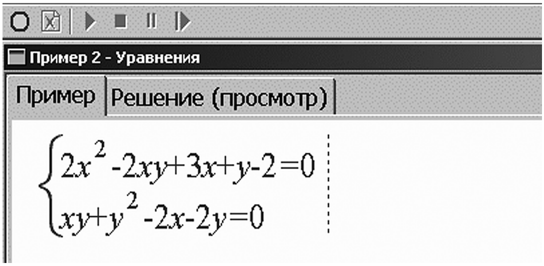


Вы можете изменять шрифт, размер и скорость выдаваемой на экран информации, отключать голосовое сопровождение или текстовые комментарии, просматривать каждый этап решения в отдельности. Для приостановки вывода решения достаточно нажать любую клавишу обычной клавиатуры, таким же образом можно возобновить вывод. Есть возможность получить на экране все решение сразу, для этого достаточно нажать кнопку «черный квадрат» — «вывести все решение».

UMS может создавать задачи, аналогичные решенным, которые школьник может использовать для подготовки к ЕГЭ, а учитель — для создания контрольных работ.

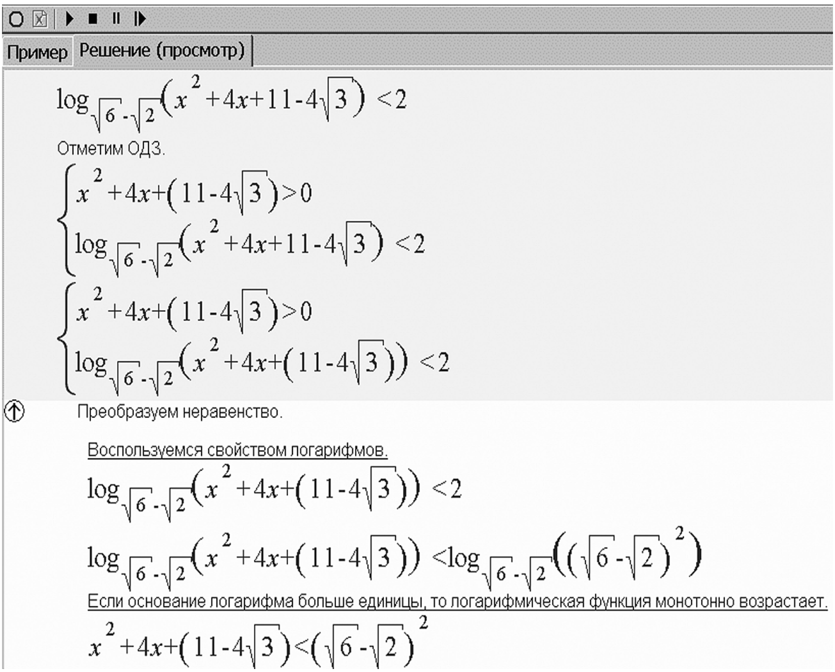


При выборе указанного пункта меню программа сгенерирует похожее задание:



С3(ЕГЭ). Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(x^2+4x+11-4\sqrt{3}\right)<2$$



Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)>0 \\ x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)<\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)>0 \\ x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)<8-4\sqrt{3} \end{cases}$$

Преобразуем неравенство.

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x>-3 \\ x<-1 \end{cases}$$

Окончательный ответ:

x	Ограничения для переменных
любое допустимое	$\begin{cases} x>-3 \\ x<-1 \end{cases}$

В решении примера бывают нераскрытые блоки, обозначаемые стрелочкой, опущенной вниз. При нажатии на эту стрелочку мышкой блок «раскрывается» и вы видите более подробное объяснение.

В нашем примере при раскрытии блока будет показано решение каждого неравенства (случаи 1 и 2), а также будет найдено их общее решение. Решение каждого неравенства изображается в виде интервала или объединения интервалов на числовой прямой.

Преобразуем неравенство.

$$\begin{cases} x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)<8-4\sqrt{3} \\ x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)>0 \end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.

$$x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)<8-4\sqrt{3}$$

Перенесем все в левую часть.

$$x^2+4x+\left(11-4\sqrt{3}\right)-\left(8-4\sqrt{3}\right)<0$$

$$x^2+4x+3<0$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$x^2+4x+3=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=4$$

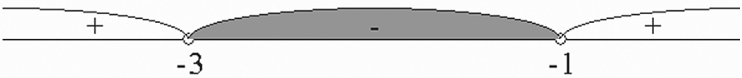
Дискриминант положителен, значит уравнение имеет два корня.
Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-4-2}{2\cdot1}=-3;\ x_2=\frac{-4+2}{2\cdot1}=-1$$

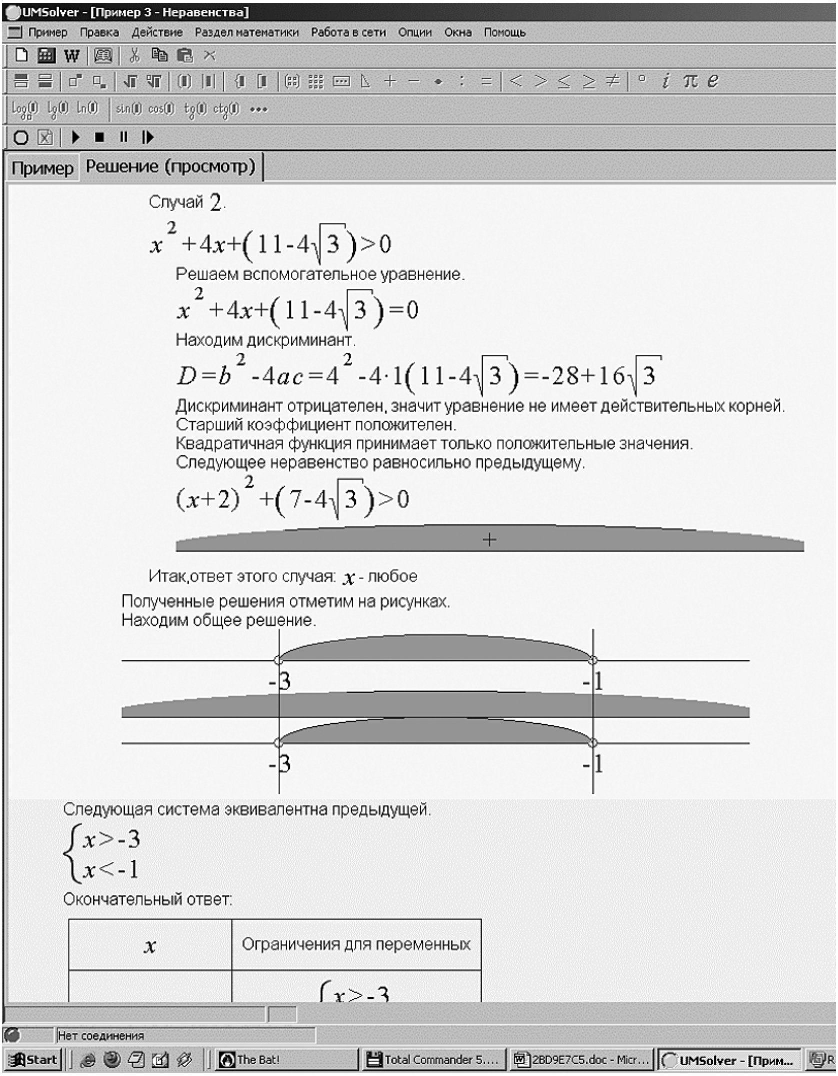
Следующее неравенство равносильно предыдущему.

$$(x+3)(x+1)<0$$



Итак,ответ этого случая: $-3<x<-1$

При решении квадратных неравенств используется свойство квадратичной функции, а именно: возможность разложения квадратного трехчлена на множители при положительном дискриминанте и представление его в виде суммы квадратов при отрицательном дискриминанте. В первом случае знаки квадратичной функции можно определить методом интервалов. Во втором случае квадратичная функция принимает только положительные значения (при положительном старшем коэффициенте). Каждое из полученных множеств изображается на рисунке и, затем, находится их пересечение.



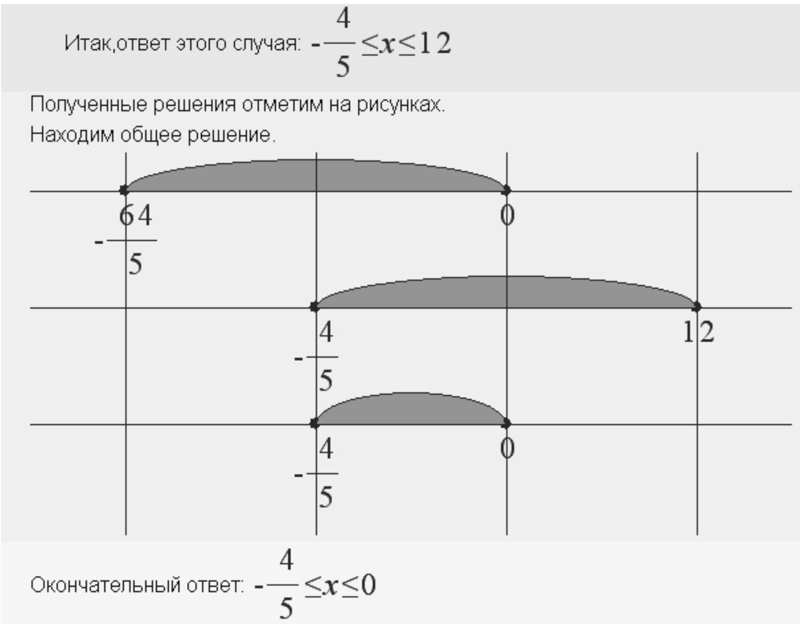
С5. Найдите все значения параметра a, при которых для любого x на отрезке $[-5,\ 5]$ справедливо неравенство $\left|a|x|-6x+2\right|\le 32$.

Чтобы неравенство выполнялось на отрезке, достаточно заметить, что для данного выражения указанное неравенство будет выполнено тогда и только тогда, когда оно будет выполнено для крайних точек интервала, то есть при $x = -5$ и при $x = 5$.

Поэтому достаточно решить систему:

$$\begin{cases} |5a + 30 + 2| \le 32 \\ |5a - 30 + 2| \le 32 \end{cases}$$

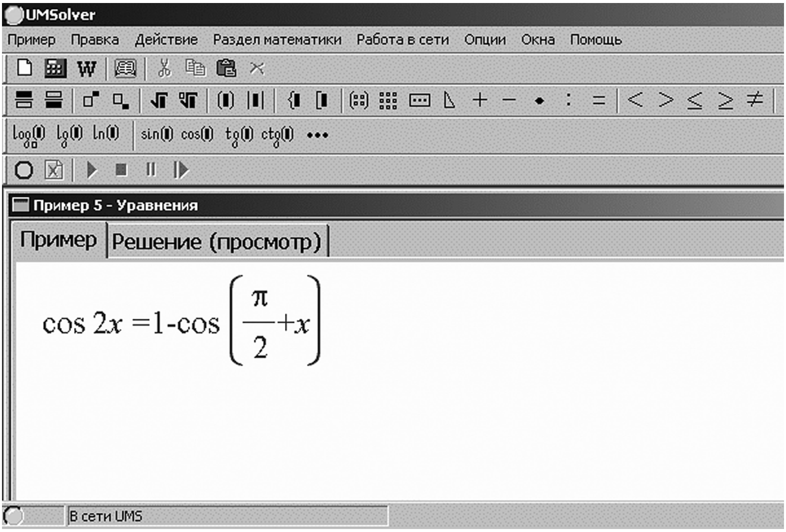
Эта система легко решается программой UMS методом интервалов. Каждое неравенство решается по отдельности, а потом находится пересечение полученных решений. На рисунке вы видите заключительный экран решения этого задания.



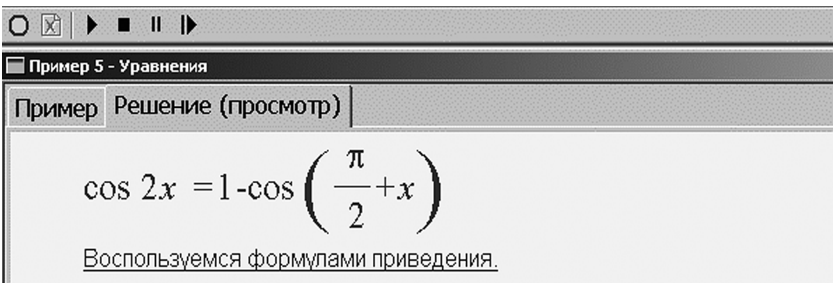
С3. а) Решить уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Найти все значения корней этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2,5\pi; -\pi]$.

Для ввода тригонометрических функций можно использовать как экранную, так и обычную клавиатуру, то есть на обычной клавиатуре тоже можно набирать названия тригонометрических функций.



Когда пример набран, то для его решения достаточно нажать клавишу «Ввод» обычной клавиатуры или зеленую кнопку «Решить».



$$\cos 2x = 1 - (-\sin x)$$

$$\cos 2x = 1 + \sin x$$

Воспользуемся основными тригонометрическими тождествами.

$$1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x$$

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases} a = \sin x \\ 1 - 2a^2 = 1 + a \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

Далее программа решает квадратное уравнение. Для просмотра его решения надо нажать мышкой на кнопку «Стрелка вниз», которую вы видите на рисунке.

Решаем вспомогательное уравнение.

$$1 - 2a^2 = 1 + a$$

Перенесем все в левую часть.

$$1 - 2a^2 - 1 - a = 0$$

Приводим подобные члены.

$$-2a^2 - a = 0$$

Изменим знаки выражений на противоположные.

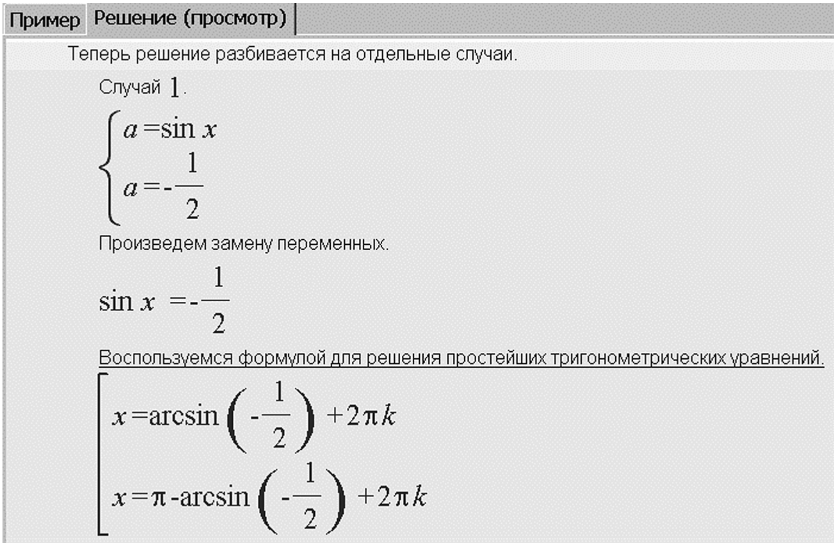
$$2a^2 + a = 0$$

Выносим общий множитель.

$$a(2a + 1) = 0$$

Ответ вспомогательного уравнения: $a = -\dfrac{1}{2};\ a = 0$

Поскольку вспомогательное уравнение имеет здесь два корня, то дальнейшее решение разбивается на два случая:



При решении тригонометрических уравнений часто удобно использовать не общую формулу, например,

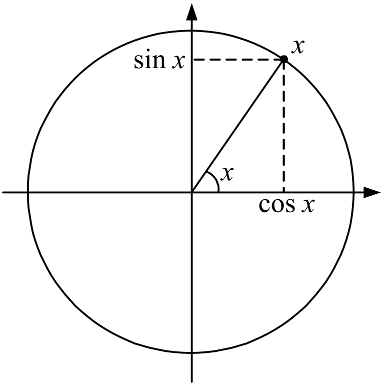
$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \left(|a| \leq 1, k \in Z\right),$$

а ее более подробный вариант:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$$

Обращаем внимание, что некоторые комментарии в решении подчеркнуты. Это гиперссылки. Если нажать мышкой на такой комментарий, то откроется соответствующее окно помощи, в котором пользователь увидит справочный материал: список формул, таблицы значений, основные тождества и т.п. В рассматриваемом примере это:

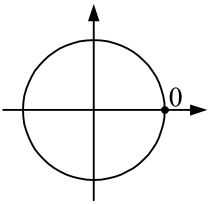
Формулы для решений простейших тригонометрических уравнений



<table>
<tr>
<td>

$\cos x = \mathbf{1} \Leftrightarrow$

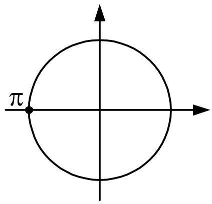
$\Leftrightarrow x = 2\pi n;\ n \in \mathrm{Z}$



</td>
<td>

$\cos x = -\mathbf{1} \Leftrightarrow$

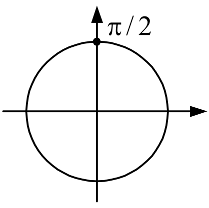
$\Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n;\ n \in \mathrm{Z}$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\sin x = \mathbf{1} \Leftrightarrow$

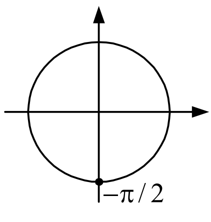
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathrm{Z}$



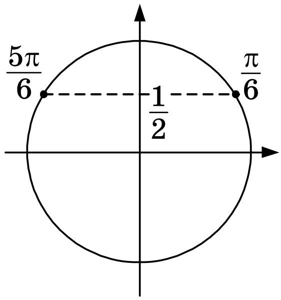
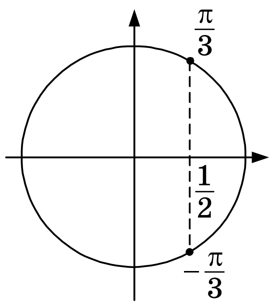
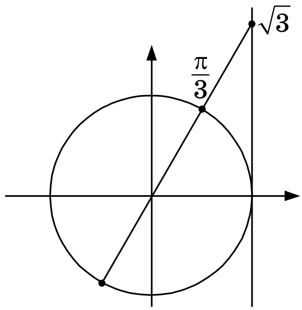
</td>
<td>

$\sin x = -\mathbf{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathrm{Z}$



</td>
</tr>
</table>

(I) $\sin x = a$	$x = \arcsin a + 2\pi n$ $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $n \in Z,\ a \in [-1, 1]$	
(II) $\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ $n \in Z,\ a \in [-1, 1]$	
(III) $\mathrm{tg}\ x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$ $n \in Z$	

Далее программа рассматривает два подслучая:

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.1.

$$x=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$$

$$x=-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k$$

Выносим знак минус из произведения.

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

Итак,ответ этого случая:

x
$-\frac{\pi}{6}+2\pi k$

Второй подслучай программа UMS разбирает аналогично:

Случай 1.2.

$$x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$$

Итак,ответ этого случая:

x
$\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

После рассмотрения 2-го случая программа UMS получает окончательный ответ:

Случай 2.

$$\begin{cases} a=\sin x \\ a=0 \end{cases}$$

Произведем замену переменных.

$$\sin x\ =0$$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$x=\pi k$$

Итак,ответ этого случая:

x
πk

Окончательный ответ:

x
$-\frac{\pi}{6}+2\pi k$
$\frac{7\pi}{6}+2\pi k$
πk

Здесь параметр k принимает любые целые значения.

Для ответа на вопрос (б) надо из окончательного ответа выбрать те решения, которые принадлежат указанному промежутку $[-2,5\pi; -\pi]$.

Это может быть сделано с помощью рисунка на тригонометрическом круге или с помощью программы UMS. В последнем случае введенное задание для первой серии ответов должно выглядеть так:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x \le -\pi \\ x \ge -2,5\pi \end{cases}$$

Решая эту систему относительно x с помощью программы UMS, получим:

x	k	Ограничения для переменных
$2\pi k - \dfrac{\pi}{6}$		$\begin{cases} k \le -\dfrac{5}{12} \\ k \ge -\dfrac{7}{6} \end{cases}$

Учитывая, что параметр k принимает только целые значения, заключаем, что в этом случае $k = -1$, то есть:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot(-1) = -\frac{13\pi}{6}$$

Для остальных серий ответов решение аналогичное. В итоге получаем ответ на вопрос (б):

x
$-\dfrac{13\pi}{6}$
-2π
$-\pi$

Текущая версия 10.0 программы Universal Math Solver позволяет решать любые задания из следующих разделов алгебры и математического анализа:

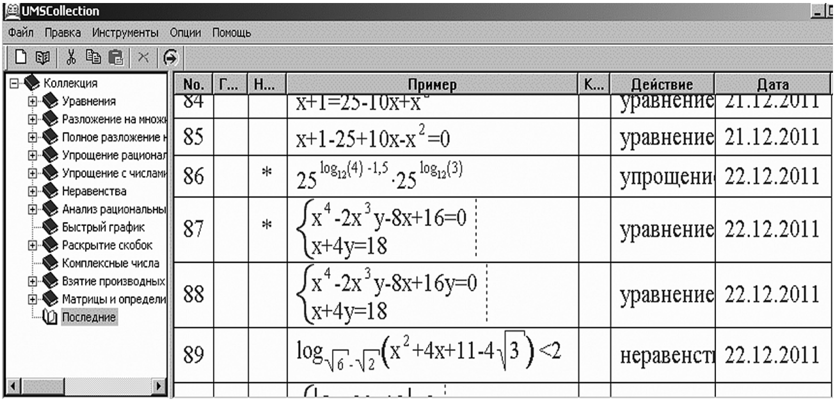
- разложение многочлена от одной или нескольких переменных на множители с рациональными коэффициентами;
- раскрытие скобок и приведение выражения к полиному или к рациональной дроби;
- упрощение рациональных алгебраических выражений с любым числом переменных;
- упрощение иррациональных, логарифмических, показательных числовых или алгебраических выражений;
- упрощение тригонометрических выражений с числовым аргументом (в градусной или радианной мере);
- рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения;
- системы уравнений с несколькими переменными;
- рациональные, иррациональные, показательные и логарифмические неравенства (системы неравенств) с одной переменной;

- уравнения и неравенства с модулями;
- уравнения с параметрами;
- решение прямоугольных треугольников;
- нахождение значений основных тригонометрических функций по значению одной из них;
- полный анализ рациональных функций с построением графика;
- нахождение производных (частных производных) функции;
- построение графика любой функции с автоматическим выбором интервала так, чтобы были видны особые точки функции;
- действия над комплексными числами;
- действия над матрицами, вычисление ранга матрицы, определитель матрицы, нахождение матрицы обратной данной;
- генерация примеров, подобных решенному, а также создание контрольных работ с необходимым числом вариантов;
- построение различных видов диаграмм и гистограммы по введенным статистическим данным.

Вышеприведенный список разделов математики позволяет сделать вывод, что знания Универсального решателя охватывают почти весь курс алгебры и математического анализа средней школы и первых курсов вузов.

В отличие от ряда мощных математических пакетов, UMS благодаря простому интерфейсу доступен для быстрого изучения и расправляется с предложенными задачами исключительно школьными методами, оформляя все этапы решения так, как это бы сделал учитель.

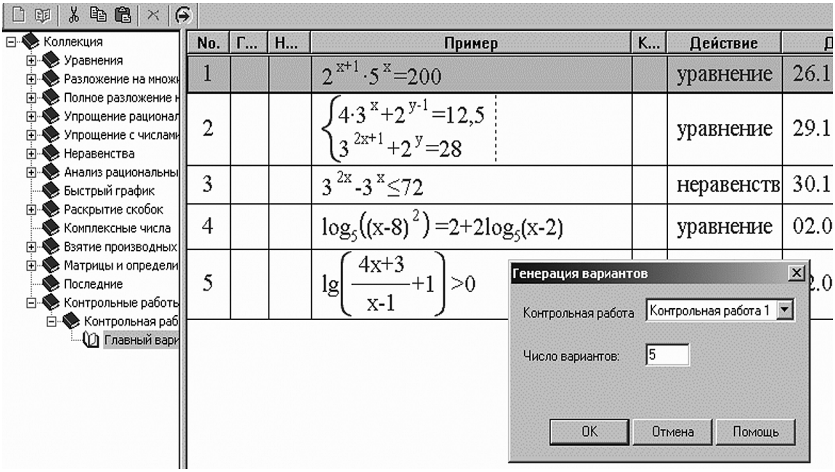
К программе прилагается задачник от UMS — сборник примеров, отсортированных по разделам и сложности, который называется КОПИЛКА. При решении любого примера пользователем пример автоматически помещается в КОПИЛКУ, где он может быть сохранен.

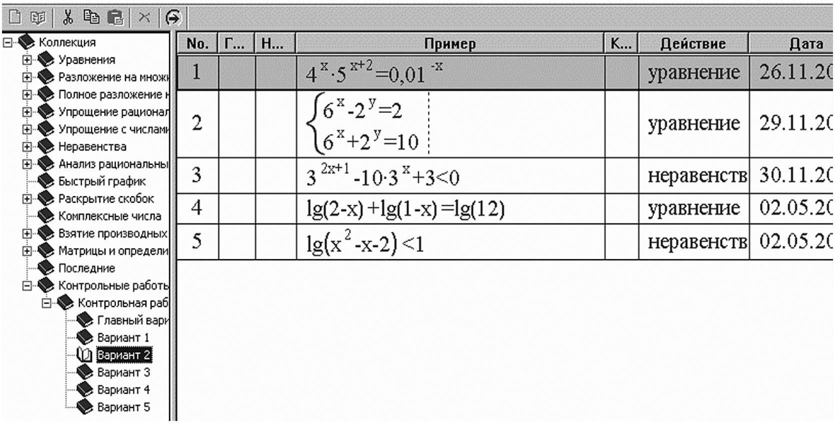


Пользователь может работать не только с базовой КОПИЛКОЙ, но и создавать для себя копилки дополнительные.

Студенты же могут экспортировать готовое решение задачи в документ Word для его включения в курсовую работу, дипломный проект, конспект или реферат. При этом формулы будут конвертироваться либо в поля Word, либо в картинки в зависимости от предпочтений пользователя.

Если смотреть на практическую ценность программы Universal Math Solver шире, то приложение с успехом сослужит службу родителям, привыкшим контролировать выполнение домашних заданий ребёнком, и учителям математики. Последние могут использовать интерактивные возможности программы в учебном процессе, возлагая объяснение решений задач на «плечи электронного педагога». Используя UMS, учитель легко сможет сгенерировать необходимое число вариантов контрольных работ по составленному им из КОПИЛКИ так называемому главному варианту из любых представленных разделов курса математики.





В комментариях к примерам контрольной работы можно уточнять задания, например: «найти наименьшее целое решение неравенства» и т.п.

Программа UMS разрабатывается уже более 10 лет группой ученых и преподавателей математики из Санкт-

Петербурга под руководством доктора физико-математических наук Станислава Кублановского. Среди научных консультантов проекта — известный специалист по теории чисел и математической логике, академик РАН Юрий Матиясевич, работы которого по решению 10-й проблемы Гильберта получили всемирное признание и вошли во все математические энциклопедии.

Более подробную информацию о программе и ее возможностях можно найти на официальном сайте разработчика — **http://www.umsolver.com**

2. О некоторых типах заданий ЕГЭ с параметром и модулем

Здесь рассматриваются задачи, входившие в часть С вариантов ЕГЭ в последние годы. Мы предлагаем единый метод для решения подобного круга задач.

З а д а н и е 1 (С6, ЕГЭ 2009)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2 (С5, ЕГЭ 2010)

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + \left|x^2 - 6x + 8\right|$$

меньше 1.

З а д а н и е 3 (С5, ЕГЭ 2011)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - ax\right| = ax - 2a$$

имеет единственное решение.

Несмотря на кажущиеся различия, все эти задания можно решить одним методом.

Задание 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=9|x-1|-4x+\left|3x-|x+a|\right|.$$

Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ — непрерывная и $f(x)\to+\infty$ при $x\to\pm\infty$. Она должна принимать наименьшее значение в некоторой критической точке. Это может происходить в точках, в которых или

$$3x-|x+a|=0,$$

или

$$|x-1|=0,$$

или

$$|x+a|=0.$$

Решая эту совокупность уравнений, получим список возможных критических точек, в которых функция может принимать наименьшее значение:

$$x_1=\frac{a}{2},\ x_2=-\frac{a}{4},\ x_3=1,\ x_4=-a.$$

Действительно, графиком рассматриваемой функции является ломаная, состоящая из отрезков и двух лучей, идущих вверх. Очевидно, что такая функция достигает наименьшего значения в некоторой вершине ломаной.

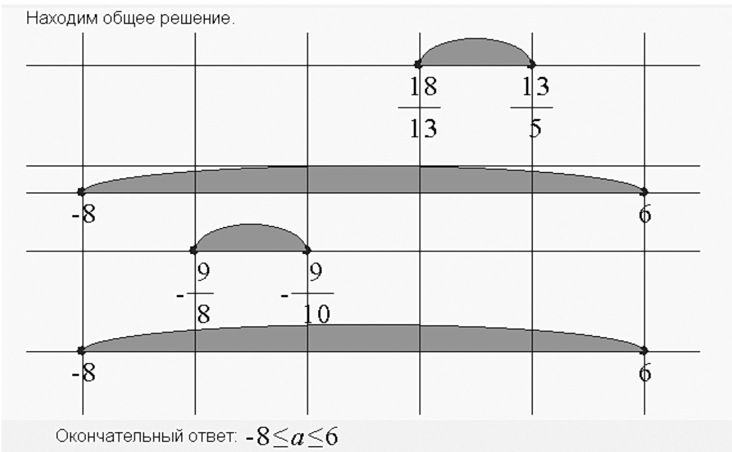
Выполнение условия задачи эквивалентно выполнению совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f\left(x_1\right)\le 0\\ f\left(x_2\right)\le 0\\ f\left(x_3\right)\le 0\\ f\left(x_4\right)\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\dfrac{a}{2}\right)\le 0\\ f\left(-\dfrac{a}{4}\right)\le 0\\ f\left(1\right)\le 0\\ f\left(-a\right)\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9\left|\dfrac{a}{2}-1\right|-4\left(\dfrac{a}{2}\right)\le 0\\ 9\left|-\dfrac{a}{4}-1\right|-4\left(-\dfrac{a}{4}\right)\le 0\\ -4\cdot 1+\left|3\cdot 1-\left|1+a\right|\right|\le 0\\ 9\left|-a-1\right|-4(-a)+\left|3(-a)\right|\le 0\end{array}\right.$$

Решая эту совокупность неравенств стандартным методом (каждое неравенство решается по отдельности) получим:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{18}{13}\le a\le \dfrac{18}{5}\\ -\dfrac{36}{5}\le a\le -\dfrac{36}{13}\\ -8\le a\le 6\\ -\dfrac{9}{8}\le a\le -\dfrac{9}{10}\end{array}\right.$$

Теперь находим объединение полученных решений:



Эту совокупность неравенств можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ — UMS (см.www.umsolver.com)

З а д а н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + \left|x^2 - 6x + 8\right|$$

меньше 1.

Решение.

Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ — непрерывная и $f(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$. Она должна принимать наименьшее значение в некоторой критической точке. Наименьшее значение функция может принимать в критических точках, в которых производная равна нулю или не существует. Это происходит в граничных точках, в которых

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2,\ x_2 = 4,$$

или в вершине параболы (при положительном раскрытие модуля):

$$x = 3 - a.$$

При нахождении этой вершины мы можем предполагать, что

$$x^2 - 6x + 8 \ge 0,$$

ибо в противном случае это будет точка локального максимума.

Выполнение условия задачи эквивалентно выполнению совокупности неравенств:

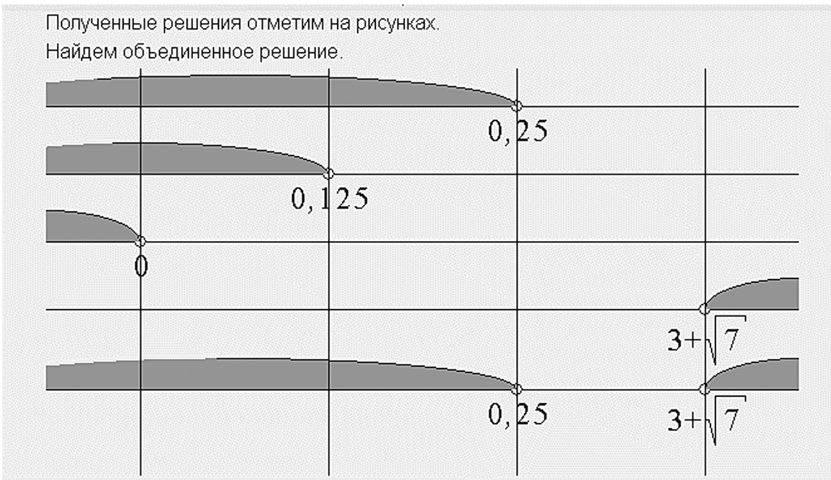
$$\left[\begin{array}{l} f(x_1) < 1 \\ f(x_2) < 1 \\ f(x_3) < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) < 1 \\ f(4) < 1 \\ f(3-a) < 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a < 1 \\ 8a < 1 \\ 2a(3-a) + \left|(3-a)^2 - 6(3-a) + 8\right| < 1 \end{array}\right.$$

Решая эту совокупность неравенств стандартным методом (каждое неравенство решается по отдельности), получим:

$$\left[\begin{array}{l} a < 0,25 \\ a < 0,125 \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 3 + \sqrt{7} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Теперь найдем объединение полученных решений:



Получим ответ: $a < 0{,}25$ или $a > 3 + \sqrt{7}$.

Эту совокупность неравенств можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ — UMS (см.www.umsolver.com)

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 - ax\right| = ax - 2a$ имеет единственное решение.

Решение.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left|x^2 - ax\right| - ax + 2a .$$

Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ — непрерывная и $f(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$. Она должна принимать наименьшее значение в некоторой критической точке. Наименьшее значение функция может принимать в критических точках, в которых производная равна нулю или не существует. Это происходит в граничных точках, в которых выполнено равенство:

$$\left|x^2 - ax\right| = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = a,\; x_2 = 0.$$

или в вершине параболы (при положительном раскрытии модуля). При нахождении этой вершины мы можем предполагать, что

$$x^2 - ax \geq 0,$$

ибо в противном случае это будет точка локального максимума. При положительном раскрытии модуля мы получаем точку $x = a$, совпадающую с x_1.

Для выполнения условия задачи необходимо выполнение системы:

$$\begin{cases} f(x_1) \geq 0 \\ f(x_2) \geq 0 \\ f(x_1)f(x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(a)f(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2a \geq 0 \\ 2a \geq 0 \\ \left(-a^2 + 2a\right)2a = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему стандартными методами, получим ответ: $a = 0$, $a = 2$. Проверкой убеждаемся, что при $a = 0$ и при $a = 2$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Эту систему можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ — UMS (см.www.umsolver.com).

Надеемся, что читатель сам сможет придумать задания, подобные рассмотренным выше, и, используя программу UMS, легко проверит правильность своего решения.

3. Упражнения, указания и ответы

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень.

а) $x - \left|2 - |x - a|\right| = 3|x - a|$

Указание: $\left[\begin{array}{l} -a + 2 \le 0 \\ 6 - (a - 2) \le 0 \\ 6 - (a + 2) \le 0 \end{array}\right.$

Ответ: $a \ge 2$.

б) $\left|x^2 - a^2\right| = 2x + a - 1$

Указание: $\left[\begin{array}{l} -2\cdot(-a) - a + 1 \le 0 \\ -2a - a + 1 \le 0 \\ \left|1 - a^2\right| - 2 - a + 1 \le 0 \end{array}\right.$

Ответ: $a \le -1$ или $a \ge 0$.

в) $\left|x^2 + 2ax\right| = 2x + 3a - 1$

Указание: $\left[\begin{array}{l} -2\cdot 0 - 3a + 1 \le 0 \\ -2(-2a) - 3a + 1 \le 0 \\ \left|(1 - a)^2 + 2a(1 - a)\right| - 2\cdot(1 - a) - 3a + 1 \le 0 \end{array}\right.$

Ответ: $a \le -1$ или $a \ge 0$.

2. При каком значении a наименьшее значение функции $y = f(x)$

а) меньше c: $f(x) = \left|x^2 - a^2\right| - 2x + a$, $c = -2$?

Указание: $\left[\begin{array}{l} -2a + a < -2 \\ -2(-a) + a < -2 \\ \left|1^2 - a^2\right| - 2 + a < -2 \end{array}\right.$

Ответ: $a < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $a > 2$.

б) меньше c: $f(x) = |x - a| + |2 - x| - x + 2a$, $c = 3$?

Указание: $\left[\begin{array}{l} |a - a| + |2 - a| - a + 2a < 3 \\ |2 - a| + |2 - 2| - 2 + 2a < 3 \end{array}\right.$

Ответ: $a < 2{,}5$.

в) больше c: $f\left(x\right) = \left|x^2 - 8x + 12\right| - 4ax$, $c = 1$?

Указание: $\begin{cases} -4a \cdot 2 > 1 \\ -4a \cdot 6 > 1 \\ \left|\left(2a+4\right)^2 - 8 \cdot \left(2a+4\right) + 12\right| - 4a \cdot \left(2a+4\right) > 1 \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{-4-\sqrt{11}}{2} < a < -\dfrac{1}{8}$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение.

а) $\left|x^2 - a^2\right| = 2ax + 2a$

Указание: $\begin{cases} -2aa - 2a \geq 0 \\ -2a(-a) - 2a \geq 0 \\ (-2aa - 2a)(+2aa - 2a) = 0 \end{cases}$

Ответ: $a = 0$, $a = -1$.

б) $\left|2x - a - 1\right| = 2 - \left|x + a\right|$

Указание: $\begin{cases} \left|\dfrac{a+1}{2} + a\right| - 2 \geq 0 \\ \left|-2a - a - 1\right| - 2 \geq 0 \\ \left(\left|\dfrac{a+1}{2} + a\right| - 2\right)\left(\left|-2a - a - 1\right| - 2\right) = 0 \end{cases}$

Ответ: $a = -\dfrac{5}{3}$, а = 1.

в) $\left|x^2 - ax\right| = ax + 2a + 1$

Указание: $\begin{cases} -a\cdot(a) - 2a - 1 \geq 0 \\ -2a - 1 \geq 0 \\ (-aa - 2a - 1)(-2a - 1) = 0 \end{cases}$

Ответ: $a = -1$.

4. Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

З а д а н и е 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a + 1| + |2a - x| = x + 3$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2

При каком *значении a* наименьшее значение функции

$$f(x) = -2x + |x^2 + 2ax| - a$$

меньше -2?

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + 2ax| = 2ax + 2a^2 + 2a$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

З а д а н и е 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x-a|+|2a-x+2|=x+3$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x)=2ax+2x+|x^2-4x+3|+2a+2$$

меньше 1?

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-\frac{a^2}{4}\right|=ax+a$$

имеет единственное решение.

Вариант 3

З а д а н и е 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a + 2| + |x + 1 - 2a| = x + 4$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = |x - a + 1| + |x| - x + 2a$$

меньше 3?

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + ax| = ax + a^2 + 2a + 1$$

имеет единственное решение.

Вариант 4

З а д а н и е 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 2ax\right| = 2x + 3a - 1$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = \left|x^2 - 6x + 5\right| - 2ax - 2a$$

больше 1?

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - ax - x\right| = ax + x + 2a + 3$$

имеет единственное решение.

Вариант 5

З а д а н и е 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 4a^2| = 2x + 2a - 1$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = |x^2 - 4x| - 2ax - 4a$$

больше 1?

З а д а н и е 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x - a + 2| = 2 - |x + a|$$

имеет единственное решение.

5. Ответы к вариантам для самостоятельного решения

Вариант 1

1. $a \geq -1,5$.
2. $a < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $a > 2$.
3. $a = -1$; $a = 0$.

Вариант 2

1. $a \geq -2,5$.
2. $a < -0,75$ или $a > 2+\sqrt{7}$.
3. $a = -2$; $a = 0$.

Вариант 3

1. $a \geq -1,5$.
2. $a < 1,5$.
3. $a = -1$.

Вариант 4

1. $a \leq -1$ или $a \geq 0$.
2. $-4-\sqrt{11} < a < -\dfrac{1}{4}$.
3. $a = -2$.

Вариант 5

1. $a \leq -0,5$ или $a \geq 0$.
2. $-4-\sqrt{11} < a < -\dfrac{1}{4}$.
3. $a = -\dfrac{2}{3}$; $a = 2$.